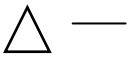
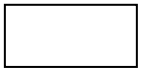
Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediţia a V-a – 05.04.2025
Barem de notare - Clasa a II-a

1.  24 : 4 = 6

 - 24 : 3 = 8

 - (2 + 4) x 2 = 6 x 2 = 12

 - 2 x 4 = 8

6 +8+12+8 =34
Se acordă câte 2,5 puncte pentru fiecare operaţie ----------8 x 2,5 = **20 puncte**

2. 54 ⟶ răsturnatul lui 45…….....5 puncte
31 ⟶ scăzătorul.....5 puncte
D – 31 = 45
D = 45 + 31
D=76.....10 puncte
Total .....20 puncte

3. a + 6 x 5 – 7 x 8 = 3 x 3.....15 puncte
a+ 30 – 56 = 9.....6 puncte
a +30 = 9+56.....1 punct
a + 30 =65.....1 punct
a = 65 – 30 .....1 punct
a = 35.....1 punct
Total.....25 puncte

4. 139 – 13 = 126 (baloane galbene)……..5 puncte

139 +126 +112 = 377 (balaone umflate)……10 puncte

27 + 14 = 41 (baloane sparte)……5 puncte

377 – 41 = 336 (baloane oferite)……5 puncte

Total …….25 puncte

Punctaj din oficiu: 10 Puncte
Total: 100 de puncte

Notă

- Se acceptă şi alte variante corecte de rezolvare. Pentru orice soluţie corectă, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediţia a V-a – 05.04.2025
Barem de notare - Clasa a III-a

1. predecesorul lui 3999 - 3998 ……..3 puncte

cel mai mare număr par format din 4 cifre pare - mszu
8200 - 8 + 2+0+0 = 10……3 puncte
cel mai mic număr impar format din 3 cifre diferite - szu
103……..3 puncte
8200 + 103 = 8303……4 puncte

8303 – 3998 = 4305……..4 puncte

Total ……..17 puncte

2.

- 1309 + (8907 - 3098) =

  1309 + 5809 = 7118 …….....4 puncte
- 4674 + 4618 = 9292 ……2 puncte
- 4098 – 3000 = 1098……2 puncte
- 5437 + 2342 = 7779……2 puncte
- 7 x 8 = 56……..2 puncte
- 3427 + (2x9) =

  3427 + 18 = 3445……4 puncte
- (5705 – 5673) : 4 = 32 : 4 = 8……..4 puncte

9292	7779	7118	3445	1098	56	8
M	A	T	I	L	D	A

Matilda ……..5 puncte
Total ……25 puncte

3. Lunile de vara: iunie, iulie, august

Iunie: 1229+98= 1327 (copii)…….3 puncte

Iulie: (1229 + 1327) + 913 = 2556+913 = 3469 (copii)……..6 puncte

August: 3469 + 578 = 4047 (copii)……...3 puncte

1327 + 3469 +4047 = 8843 (copiii au vizitat Sinaia în lunile de vară)……..6 puncte

Total ……18 puncte

4.

P + T = 28 lei……1 punct

T + A = 35 lei……1 punct

P + A = 23 lei……1 punct

P + T + A + P + T + A = 35 lei + 23 lei + 28 lei ……5 puncte

2 x (P + T + A) = 86 lei……5 puncte

P + T + A = 86 lei : 2……...5 puncte

P + T + A = 43 lei……3 puncte

28 lei + A = 43 lei……..1 punct

A = 43 lei – 28 lei ……1 punct

A = 15 lei (acuarelele)……..1 punct

T + 15 lei = 35 lei……...1 punct

T = 35 lei – 15 lei……...1 punct

T = 20 lei (tablou de pânză).....1 punct

P +20 lei = 28 lei.....1 punct

P = 28 lei – 20 lei.....1 punct

P = 8 lei (pensulă)......1 punct

Total ……30 puncte

Punctaj din oficiu: 10 Puncte
Total: 100 de puncte

Notă

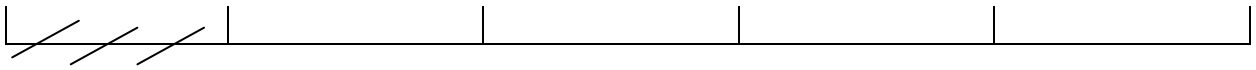
- Se acceptă şi alte variante corecte de rezolvare. Pentru orice soluţie corectă, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

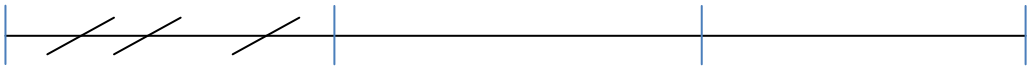
Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediţia a V-a – 05.04.2025
Barem de notare - Clasa a IV-a

1. Ana + Maria + Ioana = 53 de ani
Ana = 15 ani
5 x [326 + a x (36: 6)] +845 =2985
5 x (326 + a x 6) = 2985 – 845
5 x (326 +a x 6) = 2140
326 + a x 6 = 2140 : 5
326 +a x 6 = 428
a x 6 = 428 – 326
a x 6 = 102
a = 102 : 6
a = 17 ani are Maria
15 + 17 + I = 53
32 + I = 53
I = 53 – 32
I = 21 ani are Ioana
Se acordă câte 2 puncte pentru fiecare operaţie corectă……6 x 2 puncte = **12 puncte**
2.



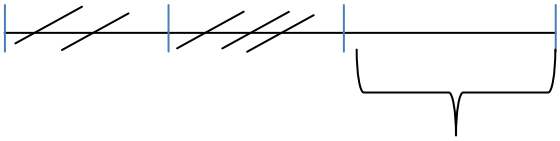
Prima zi – 1 pe 5



A doua zi – 1 pe 3 din rest



A treia zi 1 pe 4 din ce a rămas



A patra zi 2 pe 3 din rest

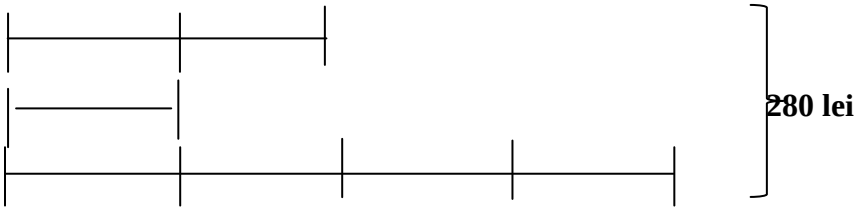
12 pagini
Pentru reprezentarea grafică se acordă…….4 puncte
12 x 3 = 36 pagini…….3 puncte
36 + 12 = 48 pagini……..3 puncte
48 : 2 = 24 (o treimie)……..3 puncte
24 x 3 = 72 (pagini)…….3 puncte
72 : 4 = 18 (o cincime)……. ……...3 puncte
18 x 5 = 90 pagini are cartea……3 puncte
Total ……22 puncte

3.

- Tabără - Caraiman - 1 h – Babele - 5 h
  1 h + 5 h = 6 h……1 punct
  6 h x 3 km = 18 = km - Ziua I……...2 puncte
- Babele - Vârful cu Dor - 3 h – Peştera Ialomiţei – 4 h
  3 h + 4 h = 7 h……1 punct
  7 h x 3 km = 21 km - Ziua a II-a……2 puncte
- Peştera Ialomiţei - Piatra Arsă – 2 h – Poiana Izvoarelor – 2 h
  2 h + 2 h = 4 h……..1 punct
- Poiana Izvoarelor – Tabără – 4 h……2 puncte
  4 h +4 h = 8 h……1 punct
  8 h x 3 km = 24 km – Ziua a III-a……...2 puncte
- 18 km + 21km + 24 km = 63 km (total)……4 puncte

Total ……16 puncte

4.



Reprezentarea grafică.....3 puncte

P + T = 85 lei……1 punct

T + A = 88 lei……1 punct

P + A = 13 lei……1 punct

P + T + A + P + T + A = 85 lei + 88 lei + 13 lei ……3 puncte

2 x (P + T + A) = 186 lei……..3 puncte

P + T + A = 186 lei : 2……....3 puncte

P + T + A = 93 lei……2 puncte

85 lei + A = 93 lei……..1 punct

A = 93 lei – 85 lei ……1 punct

A = 8 lei (acuarelele)……1 punct

T + 8 lei = 88 lei……....1 punct

T = 88 lei – 8 lei……....1 punct

T = 80 lei (tablou de pânză).....1 punct

P +8 lei = 13 lei.....1 punct

P = 13 lei – 8 lei.....1 punct

P = 5 lei (pensulă).....1 punct

280 lei : 7 segmente egale = 40 lei (preţul pensulelor).....4 puncte

40 lei x 2 = 80 lei (preţul cutiilor cu acuarele).....2 puncte

40 lei x 4 = 160 lei (preţul tablourilor de pânză).....2 puncte

40 lei : 5 lei = **8 pensule.....**2 puncte

80 lei : 8 lei = **10 cutii cu acuarele.....**2 puncte

160 lei : 80 lei = **2 tablouri de pânză.....**2 puncte

Total ……40 puncte

Punctaj din oficiu: 10 Puncte
Total: 100 de puncte

Notă

- Se acceptă şi alte variante corecte de rezolvare. Pentru orice soluţie corectă, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, orașul Sinaia
Calea București nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Școala Gimnazială „George Enescu”, orașul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul ,,Matematica dincolo de manual”
Ediția a V- a – 05 aprilie 2025
Clasa a V- a

1.Care dintre numerele 124^{100} și 26^{150} este mai mare?

Prof. Adrian P. Ghioca -enunț parțial

Soluție:

$124^{100} = (124^2)^{50}$ și $26^{150} = (26^3)^{50}$.....2p

$124^2 = 15376$.....2p

$26^3 = 17576$.....2p

Al doilea număr este mai mare decât primul.....1p

2. 2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$(x+1) + (x+2) + (x+3) + \ldots\ldots + (x+1999) = 1999^2 + 1999$

***

Soluție:

$1999x + \frac{1999 \cdot 2000}{2} = 1999 \cdot 2000$.....3p

$1999(x + 1000) = 1999 \cdot 2000$.....2p

$X = 1000 \in \mathbb{N}$.....2p

3. Pătratul unui număr natural N de două cifre, scris în baza 10, este de forma $N^2 = \overline{a(a+b)b}$, unde a, a + b, b sunt cifre, iar a ≠ 0.

1. **Arătați că a = b și *a* este pătratul unui număr natural.**
2. **Găsiți toate numerele N cu proprietatea din enunț.**

Prof. Adrian P. Ghioca – E: 6101 din G.M.B. nr. 1/1978.

Soluție:

1. $N^2 = 11(10a + b)$.....1p

Se cunoaște următorul rezultat: „dacă pătratul unui număr natural este divizibil cu un număr prim, atunci numărul este divizibil cu pătratul acelui număr prim”.

De aici rezultă că 10a + b trebuie să fie multiplu de 11. Pe de altă parte 10a + b reprezintă forma generală a unui număr de două cifre scris în baza 10. Însă un număr de două cifre este multiplu de 11 dacă cifrele sale sunt egale adică dacă a = b. În aceste condiții avem $N^2 = 11^2a$. 2p

Din acestă ultimă egalitate rezultă că a este pătratul unui număr natural.....1p

2. Deoarece a este cifră, avem a ∈ {1, 4, 9}.....1p

Din enunț rezultă că a + b este cifră, adică 2a este cifră și deci a = 9 nu convine.....1p

Deci N ∈ {11, 22}.....1p

4. Fie m = $\overline{ab}$ și p = $\overline{cd}$ două numere naturale, de câte două cifre, scrise în baza 10. Să se determine aceste numere știind că $m^2 = p^3$.

Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

Din relația $m^2 = p^3$ rezultă că p este pătrat perfect adică $p = k^2$, k natural.....2p

Obținem $m^2 = k^6$ rezultă $m = k^3$. Dar m = $\overline{ab}$, deci m ∈ {27, 64}.....3p

Pentru m = 27 rezultă p = 9 care nu convine.....1p

Pentru m = 64 rezultă p = 16 care convine.....1p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul ,,Matematica dincolo de manual”
Ediția a V- a – 05 aprilie 2025
Clasa a VI- a

1. Fie mulțimea $G \subset \mathbb{N}$, cu următoarele proprietăți:

a) $6 \in G$;

b) dacă $x \in G \Rightarrow 6x + 3 \in G$;

c) dacă $5x + 4 \in G \Rightarrow x \in G$.

Arătați că $7 \in G$ și $1969 \in G$.

Victor Ducu-Ghioca, student, Sinaia

Soluție:

Din $6 \in G \Rightarrow 6 \cdot 6 + 3 \in G \Rightarrow 39 \in G \Rightarrow 5 \cdot 7 + 4 \in G \Rightarrow 7 \in G$.....3p

Mai mult,
$7 \in G \Rightarrow 6 \cdot 7 + 3 \in G \Rightarrow 45 \in G \Rightarrow 6 \cdot 45 + 3 \in G \Rightarrow 273 \in G \Rightarrow 6 \cdot 273 + 3 \in G \Rightarrow 1641 \in G \Rightarrow 6 \cdot 1641 + 3 \in G \Rightarrow 9849 \in G \Rightarrow 5 \cdot 1969 + 4 \in G \Rightarrow 1969 \in G$
.....4p

2. Să se arate că pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, numărul

A = $\frac{36^n \cdot 5^{n+1} \cdot 7 - 2^{2n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n}{6^n \cdot 5^{n-1} \cdot 19 + 2^{n+1} \cdot 15^n}$ este număr natural.

G.M.B. nr. 5- 6/1988

Soluție:

A = $\frac{36^n \cdot 5^n \cdot 5 \cdot 7 - 2^{2n} \cdot 2 \cdot 3^{2n} \cdot 3 \cdot 5^n}{6^n \cdot 5^n \cdot 5^{-1} \cdot 19 + 2^n \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 5^n} = \frac{(36 \cdot 5)^n \cdot 35 - (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5)^n \cdot 6}{\frac{19}{5} \cdot (6 \cdot 5)^n + (2 \cdot 3 \cdot 5)^n \cdot 2}$.....4p

A = $\frac{180^n (35-6)}{30^n (\frac{19}{5}+2)} = \frac{29 \cdot 180^n}{\frac{29}{5} \cdot 30^n} = 5 \cdot 6^n \in \mathbb{N}$ 3p

3. Să se determine numerele naturale *n* pentru care avem: $\frac{3}{20} < \frac{2}{n^2} < \frac{3}{10}$.

G.M.B. nr. 1/1984

Soluție:

Aducem fracțiile la același numărător obținem $\frac{6}{40} < \frac{6}{3n^2} < \frac{6}{20}$.....3p

Obținem $20 < 3n^2 < 40$.....3p

Dar n este număr natural deci $n = 3$ este soluție unică.....1p

4. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC. Câte grade are unghiul $\sphericalangle BOC$ dacă în triunghiul ABC înălțimile duse din vârfurile B și C se intersectează în O?

G.M.B. nr. 6/1989

Soluție:

Dacă O este intersecția înălțimilor din B și C atunci O este ortocentrul triunghiului.....2p

Cum O centrul cercului circumscris triunghiului înseamnă că O este intersecția mediatoarelor, deci triunghiul este echilateral.....2p

Înălțimile sunt și bisectoarele triunghiului. Deci $m(\sphericalangle OBC) = m(\sphericalangle OCB) = 30°$.....2p

Final $m(\sphericalangle BOC) = 120°$.....1p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, orașul Sinaia
Calea București nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Școala Gimnazială „George Enescu”, orașul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediția a V- a – 05 aprilie 2025
Clasa a VII- a

1.a) Arătați că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(10 - x)\cdot n - 2\cdot|10 - x| = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 10$.

b) Pentru $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 10$, arătați că există zece numere $x_1, x_2, \ldots, x_{10} \in \mathbb{N}$, astfel încât

$x = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) - x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{10}$.

Prof. Adrian P. Ghioca, Olimpiada locală 2003

Soluție:

a) $|10 - x| = 10 - x$ pentru $x \leq 10$ 2p

Ecuația devine $(10 - x)(n - 2) = 0$.....1p

Deci $n = 2$ care convine.....1p

b) Putem lua $x_1 = x$ și $x_2 = x_3 = \ldots = x_{10} = 0$.....2p

Verificarea 1p

2. Fie $E_1 = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$ și

$E_2 = \sqrt{450} + \sqrt{300} + \sqrt{180}$

a) Demonstrați că $E_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

b) Dovediți că $E_1 \cdot E_2 > 270$.

Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

a) $E_1 = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{2} - 1 + 2 + \sqrt{5}$.....2p

$E_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.....1p

b) $E_1 \cdot E_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(15\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{5})$.....1p

$E_1 \cdot E_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\frac{30}{\sqrt{2}} + \frac{30}{\sqrt{3}} + \frac{30}{\sqrt{5}})$ 1p

= $30(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}) > 270$.....2p

(Se știe că $x+\frac{1}{x}\geq 2,(\forall)x>0$)

3. S3. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$(x\sqrt{3}+10)(|\frac{x}{4}|-3)(|x|+4)=0$

***

Soluție:

Se disting trei cazuri:

Cazul I: $x=\frac{-10\sqrt{3}}{3}$ care nu convine.....2p

Cazul II: $x=\pm 12$ care convin.....2p

Cazul III: $|x|=-4$ care nu are soluții.....2p

Finalizare – soluțiile întregi ale ecuației sunt $x\in\{\pm 12\}$.....1p

4. Determinați măsurile unghiurilor triunghiurilor isoscele în care o latură este dublul înălțimii corespunzătoare.

Prof. Adrian P. Ghioca – E:8248 din G.M.B. nr. 3/1984

Soluție:

Vom distinge 3 cazuri:

I. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel $m(\sphericalangle A)=90^o$ atunci înălțimea din A este jumătate din ipotenuză. Din acest caz, unghiurile triunghiului sunt $m(\sphericalangle A)=90^o$, $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=45^o$.....2p

II. Dacă triunghiul ABC este isoscel în A cu $m(\sphericalangle A)<90^o$ atunci înălțimea din vârful A este mai mare decât $\frac{BC}{2}$ (în triunghiul astfel obținut, unghiul din vârful A este mai mic de 45^o), deci rămâne cazul înălțimii BD, $D\in AC$. Din ipoteză, în triunghiul dreptunghic BDA avem $BD=\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2}$, deci $m(\sphericalangle A)=30^o$ și $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=75^o$. Deoarece triunghiul este isoscel, obținem un rezultat identic dacă considerăm înălțimea din vârful C.....3p

III. Dacă triunghiul ABC este isoscel în A cu m($\sphericalangle A$) > 90^o atunci printr-un raționament similar celui de la cazul II, obținem m($\sphericalangle A$) = 150^o și m($\sphericalangle B$) = m($\sphericalangle C$) = 15^o.....2p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediția a V- a – 05 aprilie 2025
Clasa a VIII- a

1. Fie $E_1 = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ și $E_2 = \sqrt{450} + \sqrt{300} + \sqrt{180}$.

a) Demonstrați că $E_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

b) Dovediți că $E_1 \cdot E_2 \neq 270$.

Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

a) $E_1 = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{2} - 1 + 2 + \sqrt{5}$.....2p

$E_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.....1p

b) $E_1 \cdot E_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(15\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{5})$.....1p

$E_1 \cdot E_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\frac{30}{\sqrt{2}} + \frac{30}{\sqrt{3}} + \frac{30}{\sqrt{5}})$ 1p

$= 30(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}) > 270$.....2p

2. a) Arătați că $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$, oricare ar fi numerele reale a și b.

b) Să se arate că numărul $(2k + 1)^3 - (2k - 1)^3$, $k \in \mathbb{Z}$ este suma a trei pătrate perfecte.

Enunț parțial și modificat - Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

a) Calcul
.....2p

b) $(2k + 1)^3 - (2k - 1)^3 = 24k^2 + 2$
.....2p

$= 16k^2 + 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 - 4k + 1$.....2p

$= (4k)^2 + (2k + 1)^2 + (2k - 1)^2$.....1p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

3. Dacă x, y, z sunt trei numere oarecare din intervalul [1, ∞), să se determine valorile lui m astfel încât valoarea numerică a expresiei
E(x, y, z, m) = xyz - xy – yz – zx + x + y + z – m să fie un număr tot în intervalul[1, ∞).

Prof. Adrian P. Ghioca E:6580 din G.M.B nr.6/1979

Soluție:

Expresia se scrie E(x, y, z, m) = (x - 1)(y – 1)(z - 1) + 1 – m.....2p

Deoarece $x \geq 1$, rezultă că $x - 1 \geq 0$, $y - 1 \geq 0$ și $z - 1 \geq 0$.....2p

Deci $(x - 1)(y – 1)(z - 1) \geq 0$.....1p

Pentru ca expresia dată să aibă valoarea numerică mai mare cu 1, trebuie ca

$1 - m \geq 1$, deci $m \in (-\infty, 0]$ 2p

4. Fie A, B, C, D patru puncte distincte necoplanare. Dacă AB ⊥ (BCD),

BE ⊥ AC , E ∈ (AC), BF⊥ AD, F ∈ (AD), demonstrați că AF ⊥ (FBE) dacă și numai dacă BC ⊥ CD.

Prof. Adrian P. Ghioca - E:11742, G.M. nr. 3/1999, pag 134

Soluție:

Aplicând teorema catetei în triunghiurile dreptunghice ABC și ABD

(AB ⊥ BC și AB ⊥ BD) avem $AB^2 = AE \cdot AC = AF \cdot AD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ADC \Rightarrow$

$\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle ACD$, (1).....3p

,, $\Rightarrow$ "Dacă AF ⊥ (BEF) $\Rightarrow$AF ⊥ FE $\Rightarrow$ m($\sphericalangle AFE$) = $90^0 \Rightarrow$ (conform (1)) $m(\sphericalangle ACD) = 90^0$ $\Rightarrow AC \perp DC$. Din AB ⊥ (BCD) și AC ⊥ CD (reciproca teoremei celor 3 perpendiculare) rezultă

BC ⊥ CD.....2p

,,$\Leftarrow$" Dacă BC ⊥ CD , din teorema celor 3 perpendiculare rezultă că $AC \perp DC \Rightarrow$

$m(\sphericalangle ACD) = 90^0 \Rightarrow$ (Conform (1)) m($\sphericalangle AFE$) = $90^0 \Rightarrow$ AF ⊥ FE.

Din AF ⊥ FB și AF ⊥ FE rezultă AF ⊥ (BEF) 2p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

3. Dacă x, y, z sunt trei numere oarecare din intervalul [1, ∞), să se determine valorile lui m astfel încât valoarea numerică a expresiei
E(x, y, z, m) = xyz - xy – yz – zx + x + y + z – m să fie un număr tot în intervalul[1, ∞).

Prof. Adrian P. Ghioca E:6580 din G.M.B nr.6/1979

Soluție:

Expresia se scrie E(x, y, z, m) = (x - 1)(y – 1)(z - 1) + 1 – m.....2p

Deoarece $x \geq 1$, rezultă că $x - 1 \geq 0$, $y - 1 \geq 0$ și $z - 1 \geq 0$.....2p

Deci $(x - 1)(y – 1)(z - 1) \geq 0$.....1p

Pentru ca expresia dată să aibă valoarea numerică mai mare cu 1, trebuie ca

$1 - m \geq 1$, deci $m \in (-\infty, 0]$ 2p

4. Fie A, B, C, D patru puncte distincte necoplanare. Dacă AB ⊥ (BCD),

BE ⊥ AC , E ∈ (AC), BF⊥ AD, F ∈ (AD), demonstrați că AF ⊥ (FBE) dacă și numai dacă BC ⊥ CD.

Prof. Adrian P. Ghioca - E:11742, G.M. nr. 3/1999, pag 134

Soluție:

Aplicând teorema catetei în triunghiurile dreptunghice ABC și ABD

(AB ⊥ BC și AB ⊥ BD) avem $AB^2 = AE \cdot AC = AF \cdot AD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ADC \Rightarrow$

$\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle ACD$, (1).....3p

„$\Rightarrow$”Dacă AF ⊥ (BEF) $\Rightarrow$AF ⊥ FE $\Rightarrow$ m($\sphericalangle AFE$) = 90^0 $\Rightarrow$ (conform (1)) $m(\sphericalangle ACD) = 90^0$ $\Rightarrow AC \perp DC$. Din AB ⊥ (BCD) și AC ⊥ CD (reciproca teoremei celor 3 perpendiculare) rezultă

BC ⊥ CD.....2p

„$\Leftarrow$” Dacă BC ⊥ CD , din teorema celor 3 perpendiculare rezultă că $AC \perp DC \Rightarrow$

$m(\sphericalangle ACD) = 90^0 \Rightarrow$ (Conform (1)) m($\sphericalangle AFE$) = $90^0 \Rightarrow$ AF ⊥ FE.

Din AF ⊥ FB și AF ⊥ FE rezultă AF ⊥ (BEF) 2p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, orașul Sinaia
Calea București nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Școala Gimnazială „George Enescu”, orașul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediția a V- a – 05 aprilie 2025
Clasa a IX- a

1. Fie ecuația $\left[\frac{x+a}{2}\right] = \frac{x+1}{3}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuația pentru a = 1.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că mulțimea soluțiilor este S = $\{-1, 2\}$.

prof. Adrian P. Ghioca, enunț parțial, Olimpiada locală 2000

Soluție:

a) Pentru a = 1 obținem $\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x+1}{3}$ 1p

Notăm $\frac{x+1}{3} = y, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3y - 1$. Ecuația devine $\left[\frac{3y}{2}\right] = y$.

Obținem $y \in \{0,1\}$

Deci $x \in \{-1, 2\}$.....3p

b) Pentru x = -1 se obține $a \in [1,3)$.....1p

Pentru x = 2 se obține $a \in [0,2)$.....1p

Deci $a \in [1,2)$.....1p

2. Demonstrați că oricare ar fi numerele reale a și b există relația

$$2 \cdot | (a - b)(1 + ab) | \leq (1 + a^2)(1 + b^2).$$

prof. Adrian P. Ghioca, enunț parțial

Soluție:

$2 \cdot | (a - b)(1 + ab) | = 2 \cdot \sqrt{(a-b)^2(1+ab)^2} \leq 2 \cdot \frac{(a-b)^2+(1+ab)^2}{2}$ 3p

$= (1 + a^2)(1 + b^2)$.....3p

Egalitate obținem când

$(a - b)^2 = (1 + ab)^2$, adică $| a - b | = | 1 + ab | \Rightarrow a - b = \pm (1 + ab)$.....1p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

3. Să se determine o condiție necesară și suficientă pe care trebuie să o îndeplinească numerele reale a și b ($a \neq 0$) astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației

$ax^2 + b|x| + a^2 - b^2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ să aibă un singur element.

Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

Se observă că, dacă α este o soluție a ecuației date, atunci și $-\alpha$ este soluție $\Rightarrow$

$a\alpha^2 + b|\alpha| + a^2 - b^2 = a(-\alpha)^2 + b|-\alpha| + a^2 - b^2 = 0$.....2p

Pentru a avea o singură soluție este necesar ca $\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0$

Înlocuind în ecuația dată obținem $a^2 - b^2 = 0$.

Să arătăm că această condiție nu este suficientă.

$a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ sau $a = -b$.....2p

Pentru $a = -b$ ecuația devine $ax^2 - a|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ și $|x| - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$,deci nu convine.....1p

Pentru $a = b$ ecuația devine $ax^2 + a|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ și $|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.....1p

Rămâne că, o condiție necesară și suficientă pentru ca ecuația dată să aibă o singură soluție este $a = b$, caz în care mulțimea soluțiilor S este $S = \{0\}$.....1p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, orașul Sinaia
Calea București nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Școala Gimnazială „George Enescu”, orașul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediția a V- a – 05 aprilie 2025
Clasa a X- a

1. Fie $f(z) = z^2 + a|z| + b$, $z \in \mathbb{C}$. Să se determine *a* și *b* astfel încât $f(1) = f(2) = 0$ și apoi să se afle toate valorile lui z pentru care $f(z) = 0$.

Prof. Adrian P. Ghioca, E: 18369 din G.M.B.

Soluție:

Din $f(1) = f(2) = 0$ rezultă $a = -3$ și $b = 2$. Atunci ecuația devine $z^2 - 3|z| + 2 = 0$.....1p

Fie $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, o soluție a ecuației. Se obține $x^2 - y^2 - 3\sqrt{x^2+y^2} + 2 = 0$ și $xy = 0$.....1p

Dacă $x = 0$ și $y^2 + 3|y| - 2 = 0$

a) Pentru $y > 0$ rezultă $y = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ care convine
b) Pentru $y < 0$ rezultă $y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ care convine.....2p

Dacă $y = 0$ și $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

a) Pentru $x > 0$ rezultă $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ care convin
b) Pentru $x < 0$ rezultă $x_1 = -1$ și $x_2 = -2$ care convin
.....2p

Deci în final obținem $z_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}i$, $z_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}i$, $z_3 = 1$, $z_4 = 2$, $z_5 = -1$ și $z_6 = -2$.....1p

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - (1 + \sin\alpha + \cos\alpha)x + \sin\alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

a) Transformați în produs $f(\sin \alpha)$.

b) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are rădăcini reale distincte.

Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

a) $f(\sin\alpha) = 2\sin^2\alpha - (1 + \sin\alpha + \cos\alpha)\sin\alpha + \sin\alpha = \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ 3p

b) $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ rezultă $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) < 0$ și $\sin\alpha > 0$

deci $f(\sin\alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow$ punctul $A(\sin\alpha, f(\sin\alpha))$ se află în cadranul al IV-lea.....2p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Cum coeficientul lui x^2 este 2 > 0 rezultă că parabola are vârf minim.....1p

De aceea parabola taie axa Ox în 2 puncte distincte adică ecuația f(x) = 0 are două rădăcini reale distince.....1p

3. Să se rezolve inecuația $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1+cosx)}\cdot\log_2(1+sinx)<0$, x ∈ [0, 2π].

Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

Se pun condițiile de existență $\begin{cases}1+cosx>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(1+cosx)\geq 0\\ 1+sinx>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[0,2\pi]-\{\pi\}\\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\\ x\in[0,2\pi]-\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}\end{cases}\Rightarrow$.....3p

$x\in[\frac{\pi}{2},\pi)\cup(\pi,\frac{3\pi}{2})$ (1).....1p

Dar pentru ca un produs să fie nenegativ implică $\log_2(1+sinx)<0$

adică $1+sinx<1\Rightarrow x\in(\pi,2\pi)$ (2).....2p

Din (1) și (2) se obține $x\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$.....1p

4. Fie numerele $n_1=\overline{abcabc}$ și $n_2=\overline{d00d}$, unde a, b, c, d sunt cifre și a ≠ 0, d ≠ 0.

a) Dovediți că $\sqrt{n_1}$ nu poate fi număr natural.

b) Determinați toate numerele n_1 și n_2 astfel încât $\sqrt{n_1+n_2}$ să fie număr natural.

Prof. Adrian P. Ghioca (enunț parțial)

Soluție:

a) $n_1=1001\overline{abc}=7\cdot11\cdot13\cdot\overline{abc}$.....1p

Pentru ca n_1 să fie pătrat perfect este necesar ca numărul $\overline{abc}$ să se dividă cu 7·11·13 = 1001 ceea ce este imposibil pentru că 1001 > $\overline{abc}$.....2p

b) $n_1+n_2=1001(\overline{abc}+d)$.

Pentru ca n_1+n_2 să fie pătrat perfect este necesar ca $\overline{abc}+d=1001\cdot k^2$, k număr natural

Dar a, b, c, d sunt cifre ⟹ $k^2=1$. Deci $\overline{abc}+d=1001$.....2p

Cel mai mare număr de trei cifre este 999.

Dacă 999 + d = 1001 rezultă d = 2, $n_1 = 999999$, $n_2 = 2002$

.....

992 + d = 1001 rezultă d = 9, $n_1 = 992992$, $n_2 = 9009$.....1p

Există 8 perechi de numere (n_1, n_2) astfel încât $\sqrt{n_1 + n_2}$ este număr natural. Pentru fiecare pereche $\sqrt{n_1 + n_2}$ = 1001.....1p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul ,,Matematica dincolo de manual”
Ediția a V- a – 05 aprilie 2025
Clasa a XI- a

1. Aflați $x \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^2 & e^{-x} \\ e^2 & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{-4} \end{vmatrix} \leq 0.$

***

Soluție:

$\Delta = e^{2(x^2+x-2)} + \frac{2}{e^{x^2+x-2}} - 3$ 2p

Notăm $e^{x^2+x-2} = t > 0$ și inegalitatea devine $t^3 - 3t + 2 \leq 0$ care descompune în

$(t-1)^2 (t+2) \leq 0$ 3p

Dar $(t-1)^2 \geq 0$ și $t + 2 > 0$. Deci $(t-1)^2 = 0$, adică $t = 1$ 1p

Revenind la notație obținem ecuația $x^2 + x - 2 = 0$ cu soluțiile $x \in \{-2, 1\}$ 1p

2. Fie mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 - X - 6I_2 = O_2\}$.

Demonstrați că, dacă $A \in M$ atunci matricea A este inversabilă și $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I_2)$.

***

Soluție:

Din relația dată și $A \in M$ se obține $A(A - I_2) = 6I_2$ 2p

Trecând la determinați obținem $\det A \cdot \det(A - I_2) = 36 \neq 0$. Deci $\det A \neq 0$, adică matricea A este inversabilă 3p

Înmulțind relația dată $A^2 - A - 6I_2 = O_2$ cu A^{-1} se obține $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I_2)$.....2p

Observație:

- ultimele 2 puncte se pot acorda și prin verificarea lui A^{-1} în definiția inversei unei matrice sau din relația $A^2 - A = 6I_2$

3. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ știind că $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ și $2x_{n-2} = x_n - x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

***

Soluție:

Relația de recurență devine $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$. Ecuația caracteristică atașată este $r^2 - r - 2 = 0$ cu soluțiile $r_1 = -1$ și $r_2 = 2$ 2p

Termenul general al șirului este $x_n = A(-1)^n + B \cdot 2^n$, unde A și B sunt numere reale care se determină din termenii dați x_1 și $x_2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ și $B = \frac{1}{6}$

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Şcoala Gimnazială „George Enescu”, oraşul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Termenul general al șirului este $x_n = \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}$ 3p

Limita șirului este ∞ , deci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent 2p

4.Calculați limita L = $\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{4x+1}+c\sqrt{9x+1})$.

***

Soluție :

L = $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(a\sqrt{1+\frac{1}{x}}+b\sqrt{4+\frac{1}{x}}+c\sqrt{9+\frac{1}{x}}\right)$ =

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(a+2b+3c)$ =

$\begin{cases}\infty & ,a+2b+3c>0\\ -\infty, & a+2b+3c<0\end{cases}$.....3p

Dacă $a+2b+3c=0 \Rightarrow$ a = – 2b – 3c

Atunci L = $\lim_{x\to\infty}[b(\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x+1})+c(\sqrt{9x+1}-3\sqrt{x+1})$=

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3b}{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x+1}}+\frac{-8c}{\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x+1}}\right)=0$.....3p

Deci L = $\begin{cases}\infty, & a+2b+3c>0\\ 0, & a+2b+3c=0\\ -\infty, & a+2b+3c<0\end{cases}$ 1p

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, orașul Sinaia
Calea București nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Școala Gimnazială „George Enescu”, orașul Sinaia
Bulevardul Carol I, nr. 36, Sinaia, Prahova
Tel: 0344806155
https://www.scoalageorgeenescu.ro/
scoalageorgeenescusinaia@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediția a V-a – 05 aprilie 2025
Clasa a XII- a

1. Fie $G = \left\{ A(x,y) = \begin{pmatrix} x + sin\alpha \cdot y & (cos\alpha - \sqrt{2}) \cdot y \\ (cos\alpha + \sqrt{2}) \cdot y & x - sin\alpha \cdot y \end{pmatrix} | x, y, \alpha \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$

Demonstrați că (G, ·) este grup .

Prof. Adrian P. Ghioca – enunț modificat

Soluție:

Se verifică imediat că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.....3p

Asociativitatea se transmite ereditar în părțile stabile.....1p

Elementul neutru este I_2.....1p

Cum pentru orice matrice A ∈ G, det A = $x^2 + y^2 \neq 0$, rezultă că toate matricele sunt simetrizabile, deci (G, ·) este grup.....2p

2. Fie $a > 1$. Pe mulțimea M = [0, ∞) se definește legea de compoziție

$x*y = \log_a(a^x + a^y - 1)$. Să se arate că (M,∗) este monoid comutativ.

Soluție:

Comutativitate.....1p

Asociativitate.....3p

Element neutru e = 0 care convine.....2p

Deci (M,∗) este monoid comutativ.....1p

3. Fie f: $(2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left[\log_{[x]} x\right]$. Aflați primitiva F: $(2, \infty) \to \mathbb{R}$ a funcției f, știind că F(-1) = 0 (am notat [t] partea întregă a numărului t).

Prof. Adrian P. Ghioca

Soluție:

Fie [x] = k, k număr natural nenul > 2. Atunci $k \leq x < k + 1$.....2p

Rezultă că $\log_{[x]} x = \log_k x \in [1, 2)$, de unde conform monotoniei funcției logaritmice obținem $\left[\log_{[x]} x\right] = 1$.....2p

Rezultă că F(x) = $\int f(x)dx$ = x + C.....1p

Din F(-1) = 0 se obține C = 1, deci F(x) = x + 1.....2p

4. Fie funcția $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Dovediți că există $c \in (0,1)$ astfel încât $\int_c^1 f(t)dt = f(c) \cdot ctg(c)$.

Victor Ducu-Ghioca, student, Sinaia

Soluție:

Fie funcția auxiliară $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x \cdot \int_x^1 f(t)dt$.....2p

Cum g(1) = g(0) = 0, rezultă din teorema lui Rolle că există cel puțin un $c \in (0,1)$ astfel încât g'(c)=0.....2p

Dar $g'(c) = \left(\cos c \cdot \int_c^1 f(t)dt\right)' = -\sin c \cdot \int_c^1 f(t)dt + \cos c \cdot f(c) = 0 =>$

$\cos c \cdot f(c) = \sin c \cdot \int_c^1 f(t)dt <=> \int_c^1 f(t)dt = f(c) \cdot ctg(c)$, ceea ce trebuia demonstrat 3p