Colegiul „Mihail Cantacuzino", oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual"
Ediţia a IV-a – 22.04.2023
Clasa a II-a

1. Se dau următoarele numerele naturale: $\overline{a3c}$, $\overline{ad7}$, $\overline{1db}$, $\overline{aea}$, unde cifrele a,b,c,d,e sunt diferite între ele.
   Să se afle aceste numere ştiind că sunt numere naturale consecutive impare, în această ordine.

   (23 puncte)

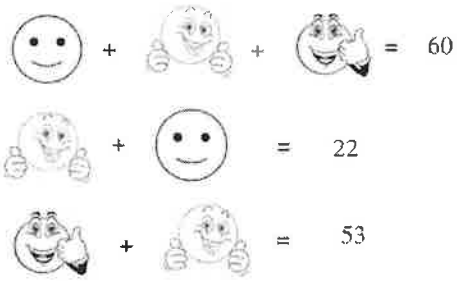
   Prof. înv. primar Guzu Oana, Sinaia

2. În urmă cu **5** ani, când s-a născut Fantasy, mama ei, Miracle, avea **26** de ani, iar vârsta bunicii era un număr egal cu răsturnatul vârstei mamei.
   Câți ani vor avea cele trei peste 7 ani?

   (20 puncte)

   Prof. înv. primar Moldoveanu Florenţa, Sinaia

3. Mircea adună premiile primite la şcoală astfel:



   Câte premii din fiecare fel a primit Mircea?



   E (Excelent);



   FB (Foarte bine);



   B (Bine)

   (22 puncte)

   Prof. înv. primar Guzu Dan, Buşteni

4. În zilele de luni până vineri, Muzeul Oraşului Sinaia este vizitat de 312 copii şi cu 118 adulţi mai puţin. În fiecare zi din weekend, numărul vizitatorilor este egal cu dublul celui mai mare număr de două cifre diferite. Câte persoane vizitează Muzeul Oraşului Sinaia în total, în decursul unei săptămâni?

   (25 puncte)

   Prof. înv. primar Guzu Camelia, Sinaia

Notă: Timp de lucru – 90 minute. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Colegiul „Mihail Cantacuzino", oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual"
Ediţia a IV-a – 22.04.2023
Clasa a III-a

1. Aflaţi numărul natural de forma $\overline{abcde}$ dacă:
$\overline{abc}$ – este cel mai mare număr natural format din 3 cifre pare consecutive;
$\overline{cde}$ – este jumătatea lui $\overline{abc}$ micşorat cu numărul care reprezintă câtul dintre 50 şi 2.

(20 puncte)
Prof. înv. primar Guzu Dan, Buşteni

2. Marcus avea de citit o carte cu 176 de pagini. În prima zi a citit dublul celui mai mic număr par cu două cifre identice, în a doua zi a citit răsturnatul predecesorului numărului 88, iar în a treia zi, restul. Câte pagini mai are de citit?

(20 de puncte)
Prof. înv. primar Moldoveanu Florenţa, Sinaia

3. În cadrul campaniei "Salvaţi planeta!", elevii unei şcoli au plantat arbori pe două alei identice, măsurând 216 m fiecare, de-o parte şi de alta a şcolii, la o distanţă de 4 metri între ei.
Câţi arbori au fost plantaţi?

(30 de puncte)
Prof. înv. primar Moldoveanu Florenţa, Sinaia

4. Pentru vizitarea Castelului Peleş din Sinaia se percep următoarele tarife:
- bilet intrare elev: 13 lei;
- bilet intrare adult: 50 lei;
- taxă foto: 70 lei.

Cei 24 de elevi ai clasei a III-a de la o şcoală din Bucureşti, dispun de o sumă totală de 1500 de lei şi doresc să organizeze o excursie şi astfel să viziteze împreună cu 3 profesori invitaţi, castelul de la Sinaia. Dacă pentru a achita motorina necesară deplasării este nevoie de 618 lei, calculaţi câţi dintre participanţii la excursie pot fotografia în interiorul castelului.

(20 puncte)
Prof. înv. primar Guzu Camelia, Sinaia

Notă: Timp de lucru – 90 minute. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Colegiul „Mihail Cantacuzino", oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual"
Ediţia a IV-a – 22.04.2023
Clasa a IV-a

1. Calculaţi $\overline{abc} - \overline{bca} - \overline{cab}$, ştiind că:
   - $a = 5 \cdot 7 - [40 : 8 + 3 \cdot (42 + 14) : 8]$
   - $15 + b = 27 - b$
   - $3 \cdot c = b$

(20 puncte)

2. Completaţi tabelul alăturat folosind doar numerele 6, 7, 8, 9, 10, astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie 40. Este obligatoriu ca pe fiecare linie şi coloană să fie numerele de la 6 la 10, luate o singură dată.

	9		7	
9			6	
	7			9
		10		8
6		9		

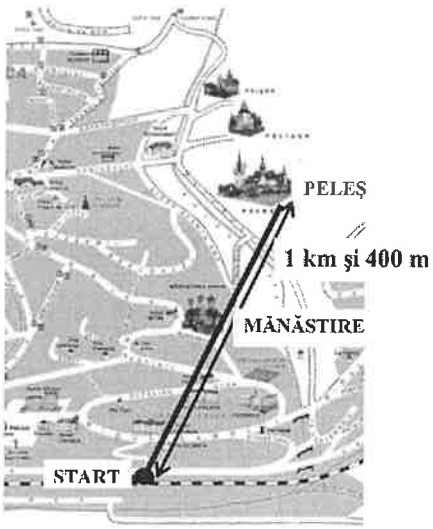
(30 puncte)

3. Perimetrul unui dreptunghi este de 210 cm. Dacă lăţimea se micşorează cu o treime din ea, iar lungimea se micşorează cu un sfert din cea iniţială, se obţine un dreptunghi cu perimetrul de 150 cm. Care erau dimensiunile dreptunghiului iniţial?

(20 puncte)

4. Harta alăturată indică traseul copiilor de la "Start" până la " Catelul Peleş".
   a) Ştiind că primul popas l-au făcut, după ce au parcurs 650 m, aflaţi câţi metri mai au de parcurs până la castel.
   b) Ştiind că:
   - au plecat de la START la ora 9 şi 15 minute;
   - au ajuns la mănăstire după 25 de minute, unde au poposit un sfert de oră;
   - de la mănăstire până la castel au mai mers o jumătate oră.

   Află la ce oră au ajuns la castel.



(20 puncte)

Prof. înv. primar Guzu Camelia, Sinaia

Notă: Timp de lucru – 90 minute. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, orașul Sinaia
Calea București nr.40
Tel/Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”

Ediția a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a V-a

1. Determinați a, b, c știind că $abc_{(3)} + bca_{(4)} = babb_{(3)}$, unde $abc_{(3)}; bca_{(4)}; babb_{(3)}$ sunt numere scrise în baza 3, respectiv 4.

Prof. Tudor Elena Simona

2. Suma dintre sfertul numărului 8^a și jumătatea sa este egală cu trei optimi din inversul numărului b. Determinați numărul a știind că

$$b = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right).$$

Prof. Tudor Elena Simona

3. Arătați că: $\frac{2^{n+3}+2^{n+4}+2^{n+5}}{2^{n+3}+2^{n+2}+2^{n+1}} = 4$.

Prof. Vlaicu Rodica

4. Determinați cifrele a și b în următoarea situație: $\frac{9}{a+b} = \overline{a,4} + \overline{0,b} - 0{,}4$.

Prof. Vlaicu Rodica

SUCCES!

Notă: Timp de lucru 90 minute. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, orașul Sinaia
Calea București nr.40
Tel/Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”

Ediția a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a VI-a

1. Se consideră numerele:

$a = 2023^{2023} - 2022 \cdot (-2023)^{2022} + 2022 \cdot (-2023)^{2021} - \cdots + 2022 \cdot (-2023)^1 - 2022$
$b = [3^0 \cdot (-2)^1 + 3^1 \cdot (-22)^2 + 3^2 \cdot (-222)^3 + \cdots + 3^{20} \cdot (-222 \cdots 2)^{21}] : [(-6)^1 + (-66)^2 + (-666)^3 + \cdots + (-666 \cdots 6)^{21}]$.

Calculați $(a - 6b)^1 + (a - 6b)^2 + \cdots + (a - 6b)^{2023}$.

Prof. Tudor Elena Simona

2. Fie numerele
$p_1 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7$

$p_2 = 10 + 20 + 30 + 50 + 60 + 70$

$p_3 = 100 + 200 + 300 + 500 + 600 + 700$

a) Arătați că numărul $p = p_1 + p_2 + p_3$ este divizibil cu 3
b) Aflați numărul de divizori ai lui p.

Prof. Vlaicu Rodica

3. Fie $\widehat{AOB}$ *și* $\widehat{AOC}$ două unghiuri neadiacente suplementare cu $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$, astfel încât măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$ *și* $\widehat{BOC}$ să fie invers proporționale cu numerele 12 și respectiv 30 și $CM \perp A0$, $M \in AO$. Știind că măsura unghiului $\widehat{ACM} = 75^0$, iar perpendiculara din A pe OC intersectează CM în punctul P, atunci:
   a) Calculați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$ și $\widehat{AOC}$;
   b) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ACP;
   c) Arătați că O este ortocentrul triunghiului ACP.

Prof. Tudor Elena Simona

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr.40
Tel/Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”

Ediția a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a VII-a

1. Determinați toate numerele naturale $\overline{xyz}$, $\overline{xyz} \leq 300$ știind că $\sqrt{\overline{0,xy(z)} + \overline{0,yz(x)} + \overline{0,zx(y)}}$ este număr natural.

***

2. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi care verifică egalitatea:
$$\sqrt{c-4} + |a - 4\sqrt{3}| + (b-8)^2 = 0$$
Calculați:
a) perimetrul triunghiului;
b) măsurile unghiurilor triunghiului;
c) aria triunghiului.

Prof. Vlaicu Rodica

3. Raportul dintre diferența şi suma a două numere reale distincte este $\frac{2}{3}$. Ştiind că împărțind cele două numere obținem câtul 3 şi restul 2. Aflați cele două numere.

Prof. Tudor Elena Simona

4. Fie ABC un triunghi obtuzunghic isoscel, $AB \equiv AC$ şi măsura unghiului $\measuredangle BAC = 120^0$ care are D mijlocul laturii AB. Perpendiculara din D pe BC întâlneşte pe AC în E, iar bisectoarea unghiului $\measuredangle CED$ intersectează BC în F. Arătați că:
a) $EC = 3\,AD$
b) $BE \perp EC$
c) $DF \parallel EC$.

Prof. Vlaicu Rodica

SUCCES!

Notă: Timp de lucru 120 minute. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr.40
Tel/Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”

Ediţia a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a VIII-a

1. Determinaţi numerele naturale consecutive a, b, c ştiind că $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=8$.

Prof. Tudor Elena Simona

2. Fie $\frac{a(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}+\frac{3b}{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}=12$. Determinaţi numerele raţionale a şi b care verifică această relaţie.

Prof. Vlaicu Rodica

3. Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara CM şi fie $ME \perp BD; E \in BD$.
   a) Ştiind că CE trece prin mijlocul segmentului AB, arătaţi că $AB = BC\sqrt{2}$.
   b) Dacă $AB = \sqrt{2}cm; BC = 1\ cm; CM = 2\ cm$, iar F este mijlocul segmentului AB, arătaţi că măsura unghiului diedru al planelor (MDF) şi (DFC) este de 60^0.

Prof.Adrian Ghioca

4. Se consideră cubul ABCD A’ B’C’D’ de muchie 5 cm. Calculaţi:
   a) Tangenta unghiului format de planele (C’BD) şi (ABC);
   b) Distanţa de la C la planul (C’BD);
   c) Cât la suta reprezintă volumul piramidei C’DBC din volumul cubului dat.

Prof.Vlaicu Rodica

SUCCES!

Notă: Timp de lucru 120 minute. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Colegiul „Mihail Cantacuzino”, oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual”
Ediția a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a IX-a

1. a) Arătați că $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a+1)$, oricare $a \geq 0$.

   b) Demonstrați că $\sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} \leq \frac{x+y+1}{x+1}$, oricare $x, y \geq 0$ și $x \leq y$.

2. Se consideră numerele reale $a_1, a_2 \ldots a_{2024}$, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice si suma
   S = ${a_1}^2 - {a_2}^2 + \cdots - {a_{2024}}^2$. Să se arate că S = $\frac{1012}{2023}({a_1}^2 - {a_{2023}}^2)$.

   Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia

3. Fie triunghiul ABC, D este mijlocul lui (AC) și M un punct în plan astfel încât $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = c\overrightarrow{MD}$, unde a,b,c $\in \mathbb{R}$.
   a) Dacă a = b = c = 1, atunci arătați că $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$.
   b) Dacă $\{N\} = MB \cap DC$, și $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$, atunci $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

   Prof. Doinaru Mihaiela , Sinaia

4. Se consideră funcția f : $Z \rightarrow Z$, f(n) = 3n-2 .
   a) Precizați care dintre numerele 0, 13, 23, 2023 aparține imaginii funcției considerate.
   b) Determinați p $\in Z^* - \{-1\}$, știind că punctul P$\left(p-3, \frac{-14p-11}{p+1}\right)$ este situat pe graficul funcției.

   Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia

Notă: Timp de lucru: 120 minute. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Colegiul „Mihail Cantacuzino", oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual"
Ediția a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a X-a

1. Fie numerele reale pozitive x, y, z astfel încât x + y + z = 3.
   Să se arate că lg (x + 2)· lg(y + 2)· lg(z + 2) ≤ $(lg3)^3$.

   Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia

2. a) Să se arate că nu există funcții injective f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care îndeplinesc condiția $f(x^2) + f(2^x) = |x - 3|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
   b) Fie A $\subset \mathbb{R}$ şi f : $A \to \mathbb{R}$, o funcție injectivă. Să se arate că funcția $\frac{1}{f}$ este injectivă .

3. Fie ε o rădăcină a ecuației $z^2 + z + 1 = 0$. Să se discute după n valoarea sumei $S = (\varepsilon + 1)^n + (\varepsilon^2 + 1)^n + (\varepsilon^2 + \varepsilon)^n$, unde n ∈ ℕ .

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{2-\sin(x+3)} = 10 - 2^{2+\sin(x+3)}$.

   Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia

Notă: Timp de lucru: 120 minute. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Colegiul „Mihail Cantacuzino", oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual"
Ediția a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a XI-a

1. Matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ este soluție a ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Determinați $detA$ și A.
   b) Calculați A^{2024}.

   Prof. Doinaru Mihaiela , Sinaia

2. Se consideră a, b, c numere reale strict pozitive cu proprietatea $|b-c| < a < b+c$ şi sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$.
   a) Demonstrați că sistemul are o soluție unică (x_0, y_0, z_0).
   b) Arătați că x_0, y_0, z_0 sunt numere reale cu modul subunitar.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.
   a) Calculați limitele laterale în $x_0 = 0$.
   b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

4. Arătați că ecuația $n^x + (n+1)^x = (n+2)^x$ are o singură soluție pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Notă: Timp de lucru: 120 minute. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Colegiul „Mihail Cantacuzino", oraşul Sinaia
Calea Bucureşti nr. 40
Tel./Fax: 0244311931
cmcsinaiaa@gmail.com

Concursul „Matematica dincolo de manual"
Ediția a IV-a – 22 aprilie 2023

CLASA a XII-a

1) Să se calculeze: $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$

(G.M.)

2) Se consideră grupurile $(G_1,*), (G_2,\circ)$ unde
$G_1 = \left(-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right), G_2 = \left(-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right), a>0,\ b>0,\ a \neq b$ și
cu legile de compoziție
$x * y = \frac{x+y}{1+a^2xy}$, $(\forall)x,y \in G_1$, $x \circ y = \frac{x+y}{1+b^2xy}$, $(\forall)\ x,y \in G_2$.
Arătați că $(G_1,*) \cong (G_2,\circ)$.

3) a) Să se arate că există a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ pentru care
$(1+\sin x+\cos x)^2 = (a+b\ sin\ x)(c+d\ cos\ x)$,
oricare $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
b) Calculați $I = \int \frac{1+\sin x+\cos}{\sqrt{(1+\sin\ )(1+\cos x)}}dx$.

4) Fie un grup $(G,\cdot)$ cu proprietatea că pentru orice $x,y \in$ G,
$xy^3 = z^3x \Rightarrow$ y = z.
a) Să se rezolve în G ecuația $x^3 = e$.
b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ .

(G.M.)

Notă: Timp de lucru: 120 minute. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.